Алғы сөз

Тұтас орта механикасының (ТОМ) курсы – механика саласына жататын, университеттердің механика – математика факультеттерінде оқылатын негізгі, маңызды пәндердің бірі. Ұсынылып отырған кітап студенттерге үш семестр бойы қазақ тілінде оқылатын тұтас орта механикасы жалпы курсының бірінші бөлімі (бірінші томы).

Жаратылыстану ғылымдары пәндерінің маңыздылығы тұтас орта механикасы мәселелерінің теориялық жағынан да, тәжірибелік зерттеу нәтижелері жағынан да ғылыми мақалалардың мол екендігінде. Сонымен қатар көптеген қомақты оқулықтардың баспадан шығуынан да байқалынады. Солардың ішінен Л.И.Седовтың екі томдық оқулығын (Механика сплошной среды, т. I, II. - М., Наука, 1976, 535 с.) ерекше атап айтқан жөн. Біздің пікірімізше – бұл кітапта тұтас орта механикасының теориялық негіздері: тұтас орта кинематикасы, деформация және деформация жылдамдығының тензорлық ұғымдары, олардың ішкі кернеулер тензорымен байланысы, динамика теңдеулері мен теоремалары, термодинамика мен электродинамиканың тұтас ортаға қатысты түсініктері мен теңдеулері, деформацияланатын ортаның қозғалысын зерттеу әдістері және оларды тұтас ортаның негізгі классикалық модельдерін құруға пайдалану жолдары математикалық тұрғыдан орынды және бір ізді, жүйелі баяндалған. Сондықтан Л.И.Седовтың екі томдық оқулығы пәнді орыс тілінде оқитын студенттерге ұсынылатын негізгі оқулықтардың бірі. Қазақ тобында оқитын студенттер тек қана өздерінің жетілдірілмеген конспектілеріне ғана амалсыздан сүйенеді. Сондықтан қазақ тіліндегі тұтас орта механикасы оқулығына мұқтаждық өте үлкен, себебі ана тілінде пәнді толық түсіну, меңгеру әлде қайда оңай.

Орыс және қазақ топтарындағы лекциялық материалдардың бір типтілігін сақтау үшін, ұсынылып отырған оқулықтың шартты белгілері, терминдері және тақырыптардың орналасу реті орыс тілінде оқитын студенттер пайдаланатын оқулыққа барынша жақындатылған. Сонымен қатар, бұл оқулықта орыс тілінде оқу құралы ретінде шыққан тұтас орта механикасы да

қамтылды және оқу - жұмыс бағдарламасына сәйкес құрылды (Ш.А. Ершин, Г.Б. Шерьязданов. Введение в механику сплошной среды. Алматы, Қазақ университеті, 2003, 108 с.).

Авторлардың мүмкіншіліктеріне орай, қазақ тіліндегі кітаптың көлемі едәуір кеңейтілген, «Тұтас орта механикасы» пәнін жете меңгеру үшін дайындықты қамтамасыз ететін елеулі жетекші құрал болып табылады. Оқулықтың қаншалықты сәтті шыққандығын оқырмандар бағалай жатар.

Бұл кітап қазақ тілінде тұтас орта механикасын меңгеруге негіз болатын тұңғыш оқулық. Оқулықтың мазмұнын, сапасын жақсартуға бағытталған сын ескертулеріңізбен ұсыныстарыңызды осы жолды жазушы мен авторлар ризашылықпен қабылдап, келесі басылымда ескеретін болады.

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің
құрметті кафедра меңгерушісі, академик
Ш.Ә. Ершін

Шартты белгілер

m- масса
t - уақыт
V- көлем
σ - беттің ауданы
p - қысым
T- температура
ρ - тығыздық
$\vec{F}$ - массалық (көлемдік) күштің тығыздығы (векторлық шама)
F – серпімді дененің еркін энергиясы (скалярлық шама)
E - кинетикалық энергияның тығыздығы
U - ішкі энергияның тығыздығы
Q - жылу мөлшері
$\vec{q}$ - жылу ағыны
λ - жылуөткізгіштік коэффициенті
α - жылу беру коэффициенті
Φ - еркін энергия
$\vec{э}_i$ - базис векторы
ξ^k -ілеспелі жүйенің координаталары (Лагранж айнымалылары)
φ - Эйлер бұрышы
$\vec{r}$ - радиус-вектор
x^i - қозғалмайтын санақ жүйесі (Эйлер айнымалылары)
$\vec{w}$ - орын ауыстыру векторы
$\vec{v}$ - жылдамдық векторы
$\vec{a}$ - үдеу векторы
$\vec{n}$ - нормаль
$\vec{\tau}$ - жанама бірлік векторы
g_{ji} - метрикалық бірлік тензордың компоненттері
ε_{ij} - деформация тензорының компоненттері
e_{ij} - деформация жылдамдығы тензорының компоненттері
P^{ij} - кернеу тензорының компоненттері
∇ - Гамильтон символы

δ_i^j - Кронекер символы

Γ_{mk}^j - Кристоффель символы

ds, ds’- доғалардың элементтері

J_i^* - деформация тензорының инварианттары

J_i^{**} - деформация жылдамдығы тензорының инварианттары

J_i^p - кернеу тензорының инварианттары

ℓ - салыстырмалы ұзару коэффициенті

θ - көлемдік ұлғаю коэффициенті

μ - динамикалық тұтқырлық коэффициенті

ν - кинематикалық тұтқырлық коэффициенті

R - газ тұрақтысы

c_p - тұрақты қысымдағы меншікті жылу сиымдылық

c_v - тұрақты көлемдегі меншікті жылу сиымдылық

χ - толық энергияның тығыздығы

β - кеуектілік коэффициенті немесе жер жынысының кеуектілігі

k - кеуекті ортаның өтімділік коэффициенті

k_1- фильтрация коэффициенті

γ_1, γ_2 - Ламе тұрақтылары

E_m- Юнг модулі

$\sigma_п$ - Пуассон коэффициенті

S - энтропия

q - электр заряды

ρ_e - электр зарядтарының тығыздығы

$\vec{E}$ - электр өрісінің кернеулігі

$\vec{j}$ - ток тығыздығы

$\vec{H}$ - магнит өрісінің кернеулігі

ε_e - диэлектрлік өтімділік

μ_e - магниттік өтімділік

$\vec{B}$ - магнит индукциясының векторы

I ТАРАУ. ЖАЛПЫ МӘСЕЛЕЛЕР

1.1. Тұтас орта механикасы пәні

Физика, математика, химия т.б. жаратылыстану ғылымдарының қатарында денелердің механикалық қасиеттері мен олардың қозғалыстарын зерттейтін ғылымның қомақты саласы бар.

Өзімізге белгілі, кез келген зат молекулалардан, ал оның өзі атомдардан тұрады. Атомдар олардан да ұсақ элементар бөлшектерден құралады. Газдардың ішіндегі молекулалардың өзара әсері тек қана олардың соқтығысуына байланысты болады. Газдармен салыстырғанда сұйықтар мен қатты денелердегі молекулалардың өзара әсер күштері елеулі үлкен.

Бірақ та, біз нақты (реал) өмірде заттардың молекулаларының құрылысын сезбейміз, тек жеке дене ретінде қабылдаймыз, себебі қалыпты жағдайда олардың өлшемдері өте кішкентай (мысалы, заттың бір молінде 6,02 10^{23} молекула бар) және бір-бірімен тығыз орналасқан.

Сонымен, денелердің (орталардың) механикалық қасиеттері мен әртүрлі қозғалыстарын зерттейтін ғылым – **механика** деп аталады.

Механиканың өзі бірнеше бөліктерден тұрады: теориялық механика, тұтас орта механикасы, аспан механикасы, биомеханика және т.б.

Бұл оқулықта **тұтас орта механикасы негіздерінің бастамасы мазмұндалған.**

Тұтас орта механикасында кеңістікті үздіксіз тұтас орта түрінде толтырып және қозғалыс кезінде нүктелерінің ара қашықтықтары өзгеріп тұратын, **материалдық денелердің қозғалыстары қарастырылады.** Тұтас орта механикасы (ТОМ) – сұйық, газ тәріздес және деформацияланатын қатты орталардың қозғалыстарын (гидромеханика, газ динамикасы, аэродинамика, серпімділік теориясы, серпімді тұтқырлық және пластикалық, т.б.) зерттеуге арналған механиканың кең саласы.

1.2. Зерттеу әдістері

Бұл пән деформацияланатын ортаның қозғалысын зерттегенде математикалық әдістер қолданылатын тұтас орта механикасының теориялық курсы болып табылады. Ол әдістердің мәні мынада. Тұтас орта қозғалысын сипаттайтын және бір мәнді анықтайтын (жылдамдық өрісі, қысым өрісі, температура өрісі және т.б.) бірнеше ұғымдар енгізіледі.

Тұтас орта механикасында механикалық құбылыстарды математикалық есептерге келтіретін, яғни механикалық процестерді математикалық модельдер арқылы зерттейтін әдістер жасалынуда.

Денелердің қозғалысын зерттегенде олардың меншікті қасиеттеріне сүйену қажет. Өзімізге белгілі кез келген денелердің әртүрлі бөлшектерінің арасында белгілі бір өзара әсер болады.

Нақты (реал) денелердің моделін жасағанда олардың әртүрлі құрылымдық ерекшеліктерін ескеру қажет. Құрылымдық ерекшеліктерінен басқа заттардың физикалық қасиеттері мен күйлері және қоспалардың, сұйықтардың, қорытпалардың құрамдарының, сол сияқты орта қозғалысының сапалы өзгерістерінің маңызды мәні бар.

Жоғарыда келтірілген құбылыстардағы физикалық микроскопиялық механизм мен элементар бөлшектердің (молекулалардың) қасиеттерін терең талдау негізінде макроскопиялық заңдарды тағайындау механиканың негізгі мәселелерінің бірі болып табылады.

Материалдық денелер қозғалысын қарастырғанда маңызды мәні бар құбылыстар мыналар: фазалық ауысулар процестері, жылуөткізгіштік, диффузия, сәулелену, ионизация және т.б.

Молекулалар санының өте көптігі және барлық өзара әсер күштерінің белгісіздігінен материалдық денелерді тек молекулалардың жиынтығы деп қарастыру негізінде механиканы дамыту мүмкін емес.

Күнделікті өмірде тек қана кейбір орташа, жалпылама характеристикалар қажет.

Материалдық ортаның характеристикаларын зерттегенде физикада кең қолданылатын әдістердің бірі **статистикалық**

әдіс. Мұнда зерттелетін құбылыстарға ықтималдық тәсілі пайдаланылады және элементар бөлшектердің (молекулалардың) үлкен ансамблінің орташа характеристикалары енгізіледі. Элементар бөлшектер бір-бірімен соқтығысқан кезде ғана өзара әсерлеседі деп алынады. Осыдан системаның микроскопиялық сипаттамасын жасағанда бір бөлшекті таралу функциясын пайдалануға болады. Соңында пайда болатын негізгі теңдеу белгілі Больцман теңдеуі болып табылады. Ол – сызықты емес интегродифференциалдық теңдеулер жүйесі. Оның шешімдері қарапайым есептерге де мәлімсіз. Себебі, мұндай есептерді шығару көптеген қиындықтарға әкеліп соғады.

Материалдық денелер қозғалысын зерттеудің басқа бір әдісі, гипотезалар мен тәжірибелер заңдылықтарына негізделіп анықталған, **феноменологиялық макроскопиялық теория** болып табылады. Практикалық маңызды есептерді шешуде макроскопиялық теориялар тиімді құрал және олардың көмегімен алынған мәліметтер тәжірибемен сәйкес келеді.

Бізді қызықтыратын мәселе жеке молекулалардың қозғалысы емес, тек қана бір-бірімен байланысқан саны көп молекулалардан тұратын денелердің қозғалысы мен жалпылама қосынды әсері. Барлық денелер жеке молекулалардан тұратындығы белгілі, бірақ олар кез келген берілген көлемде өте көп, сондықтан да денені жуықтап кеңістікті тұтас түрде толтырып тұрған орта ретінде қарастыруға болады.

Тұтас орта механикасында денені геометриялық кеңістіктегі көлемді үздіксіз толтырып тұратын белгілі бір субстанция түрінде көрінетін, **материалдық континуум** деп атайды. Үздіксіз континуум ретінде тек қана кәдімгі материалдық денелерді ғана емес, әртүрлі өрістерді де, мысалы, электромагниттік өрісті қарастыруға болады. Көлемі шексіз аз деп алынған дене белгілі бір бөлшек болып табылады. **Феноменологиялық әдіс** бойынша тығыздық, орын ауыстыру, жылдамдық, ішкі энергия, температура, энтропия, жылу ағыны сияқты ұғымдар координаталар мен уақыт бойынша үздіксіз дифференциалданатын функция ретінде ендіріледі. Тұтас орта механикасында массаның, импульстің, энергияның, электр зарядының сақталу заңдары мен энтропияның балансы

пайдаланылады. Сонымен қатар, тұтас орта механикасының іргелі ұғымдары – ішкі кернеу мен деформация енгізіледі. Бұл тензорлық есептеу мен анализ негіздерін білуді талап етеді.

1.3. Тензорлық есептеу мен анализ элементтері

Тұтас орта қозғалысының көптеген характеристикаларының табиғаты тензорлық түрде болады, сондықтан тензорлық есептеу мен анализдің негіздерін осы курсты зерттеуге қажетті көлемде қарастырамыз.

Координаталар жүйесі сандар мен кеңістіктегі нүктелер арасында белгілі бір сәйкестілік орнатады. Үш өлшемді кеңістіктің әрбір нүктесінде үш координаталар сызығы бар – бақылаушының инерциялық жүйесі (x^1, x^2, x^3) немесе ілеспелі координаталар жүйесі (ξ^1, ξ^2, ξ^3) болады.

Үш өлшемді евклид кеңістігінде сызықты – бір-біріне тәуелсіз үш вектор берілсін дейік

$$\vec{э}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \qquad (1.1)$$

оларды **негізгі базис векторлары** деп атайды. Мұндағы $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3)$ кеңістіктегі М нүктесінің радиус-векторы. Декарт координаталар жүйесінде $\vec{э}_1 = \vec{i}, \quad \vec{э}_2 = \vec{j}, \quad \vec{э}_3 = \vec{k}$ болсын.

$\vec{э}_i$-ге қатысты **түйіндес базис векторлары** дегеніміз, төмендегі талапты

$$\vec{э}_i \cdot \vec{э}^j = \delta_i^j, \quad (i, j = 1,2,3)$$

қанағаттандыратын $\vec{э}^j$-дің үш векторлары. Мұндағы δ_i^j- **Кронекер символы.** Оның қасиеті: i=j болғанда, δ_i^j бірге тең, ал i≠j болғанда, δ_i^j нольге тең

$$\delta_j^i = \begin{vmatrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{vmatrix}.$$

$\vec{э}^{\,j}$-дің $\vec{э}_i$ арқылы қарапайым түрде өрнектелетіндігін байқау оңай, атап айтқанда

$$\vec{э}^{\,1} = \frac{\vec{э}_2 \times \vec{э}_3}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)}, \quad \vec{э}^{\,2} = \frac{\vec{э}_3 \times \vec{э}_1}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)},$$
$$\vec{э}^{\,3} = \frac{\vec{э}_1 \times \vec{э}_2}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)}. \tag{1.2}$$

$\vec{a}$ векторын негізгі немесе түйіндес базис векторы ретінде көрсетіп, **векторлық кеңістіктің** элементі деп қарастыруға болады

$$\vec{a} = a^i \, \vec{э}_i = a_j \, \vec{э}^{\,j}. \tag{1.3}$$

$a^i = \vec{a} \cdot \vec{э}^{\,i}$ және $a_j = \vec{a} \cdot \vec{э}_j$ екендігі (1.3) сызықтық жіктеуден оңай көрінеді. Сонымен, (1.3) теңдігін мына түрде

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{э}^{\,i})\vec{э}_i = (\vec{a} \cdot \vec{э}_j)\vec{э}^{\,j} \tag{1.4}$$

жазуға болады.

Ескерте кететін жағдай, a^i-компоненті **контравариантты,** ал a_j- компоненті **ковариантты** делінеді.

(1.4) өрнегін базистік векторларға $\vec{э}_j$ пайдалансақ, онда ол төмендегідей формулаларды береді

$$\vec{э}_i = g_{ij} \, \vec{э}^{\,j}, \qquad \vec{э}^{\,i} = g^{ij} \, \vec{э}_j,$$

мұндағы $g_{ij} = \vec{э}_i \cdot \vec{э}_j$ және $g^{ij} = \vec{э}^{\,i} \cdot \vec{э}^{\,j}$ **метрикалық тензордың** компоненттері деп аталады және олар симметриялы болып келеді

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji} \quad \text{және} \quad g_{ij} \cdot g^{ij} = \delta_i^j.$$

Вектор дегеніміз, $\vec{a}$ векторының компоненттерінің a_j **(ковариантты)** немесе a^i **(контравариантты)** $\vec{э}_j$ базистен $\vec{э}'_i$-ге көшкенде

$$a_{i'} = \beta_{i'}^j a_j \quad \text{немесе} \quad a^{i'} = \beta_j^{i'} a^j,$$

заңдылығымен өзгеретін үш санның бір ізділігі. Ал $\vec{э}_i$ негізгі базистен $\vec{э}^j$ түйіндес базиске көшкенде орын алатын мәндер:

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{э}_j = a^i \, \vec{э}_i \vec{э}_j = g_{ij} a^i \quad \text{және} \quad a^i = \vec{a} \cdot \vec{э}^i = a_j \, \vec{э}^j \vec{э}^i = g^{ji} a_j.$$

Егер метрикалық тензор белгілі болса, онда M және N нүктелерінің ара қашықтығы мен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш былай анықталады:

$$\left| \overrightarrow{MN} \right| = ds^2 = g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j,$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{g_{ij} a^i b^j}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{mn} a^m a^n g_{es} b^e b^s}}.$$

Осы жағдайда, **берілген кеңістіктің метрикасы** анықталған делінеді.

Бастапқы үш өлшемді кеңістіктегі әрбір $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларының жұбына компоненттері арқылы мән бергенде, мысалы, контравариантты a^i, b^j-ге тек қана жалғыз $\vec{a}\,\vec{b}$ элементі сәйкес келеді (9-компонентті шама), яғни

$$C^{ij} = a^i b^j = \begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторларының диадалық көбейтіндісі** делінеді. Бұл тоғыз санды кез келген координаталар жүйесінде анықтауға болады. Мысалы, егер $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары басқа базисте $\vec{э}_j$ берілсе, онда бұл базисте (1.5) ұқсас анықтама орын алады, яғни

$$C'^{ik} = a'^i b'^k .$$

Келесі түрлендірулерден кейін

$$a'^i = \beta^i_j a^j, \qquad b'^k = \beta^k_e b^e$$

төмендегіні аламыз

$$C'^{ik} = \beta^i_j \beta^k_e C^{je} . \qquad (1.6)$$

Екінші рангілі (екінші валентті) тензор дегеніміз, кез келген координаталар жүйесінде анықталатын, екінші рангілі тензордың компоненттері деп аталатын тоғыз санның C'^{ik} жиынтығы координаталарды түрлендіргенде (1.6) түрлендіру формуласына бағынатын объект. Тензордың рангі (валенттілігі), тензордың құрылымы (индекстеріне байланысты контравариантты, ковариантты және аралас болып бөлінеді) тензорларға тән ерекше түсініктер.

Индекстік белгілердің көрсетілуіне қарай, еркін индекстердің саны мен орналасуына байланысты шаманың тензорлық түрі туралы айтуға болады. Егер тензор компоненттерінің индексі болмаса, онда ол **скаляр** немесе **нольдік рангілі тензор** екендігін көрсетеді (мысалы: тығыздық ρ, қысым p, температура T). **Бірінші рангілі тензорлардың** ($\vec{v}$ жылдамдық, $\vec{a}$ үдеу т.б. векторлар) компоненттері бір еркін

индексі бар негізгі әріппен белгіленеді, мысалы, a_i, a^j. **Екінші рангілі тензорлардың** компоненттері екі еркін индекстері бар символдармен белгіленеді, мысалы, деформация тензорлары ε_{ij}, деформация жылдамдықтарының тензоры e_{ij}, кернеу P^{ij} және т.б.

1.3.1.Тензорлармен жүргізілетін қарапайым операциялар

Ескерте кететін жәйт, тензорларға жүргізілетін барлық операциялар инвариантты, яғни координаталар жүйесін түрлендіргенге тәуелді емес. Тензорларды пайдаланып жасалынған операциялар қайтадан тензорларды беруі қажет. **Тензор арқылы жазылған теңдеу бір координаталар жүйесінен, екінші координаталар жүйесіне өткенде түрін өзгертпейді.**

а) Индекстердің орнын ауыстыру.

Егер қарастырылып отырған тензордың Π_{ij} компоненттерінің индекстері орнын ауыстырса, жаңа объект пайда болады $Д_{ij} = \Pi_{ji}$, орын ауыстыру инвариантты болғандықтан, ол да тензор болады.

б) Тензорларды қосу (шегеру).

Рангілері бірдей тензорларды қосуға (шегеруге) болады. Мысалы, егер $\vec{a} = \Pi_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j$, $\vec{b} = Д_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j$ болса, онда

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\Pi_{ij} + Д_{ij}\right)\vec{э}^i \vec{э}^j = C_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j = \vec{c},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(\Pi_{ij} - Д_{ij}\right)\vec{э}^i \vec{э}^j = \Phi_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j = \vec{d},$$

яғни рангілері бірдей екі тензорды қосқанда (шегергенде) олардың қосындысы (айырымы) сол рангілі (валентті) үшінші тензорды береді.

в) Тензорларды санға көбейту.

Мысалы, $\lambda П_{ij} = Д_{ij}$. Тензорларды санға көбейткенде сол рангілі басқа тензор шығады.

г) Симметрияландыру мен альтернирлендіру.

Егер екінші рангілі тензор берілсе $П_{ij}$, сол рангілі тензор алатын операция $П_{(i,j)} = П_{ij} + П_{ji}$ **симметрияландыру** делінеді, яғни $П_{(ij)} = П_{(ji)}$.

Операция нәтижесінде теріс таңбалы, екінші рангілі тензор $П_{[i,j]} = П_{ij} - П_{ji}$ алынатын болса, оны – **альтернирлендіру** $П_{[i,j]} = -П_{[j,i]}$ дейді, ал теріс таңбалы тензор – **антисимметриялық тензор** деп аталынады.

Олай болса, төмендегідей түрдегі арақатынас әрқашанда орындалады

$$П_{ij} = \frac{1}{2}П_{(i,j)} + \frac{1}{2}П_{[i,j]}.$$

д) Индекстерді көтеру және түсіру.

Бұл операция метрикалық тензордың көмегімен жүргізіледі. Индекстерді төмен түсіретін операциялар:

$$П^{ij}g_{ki} = П^{\bullet j}_{k\bullet}, \quad П^{ij}g_{jk} = П^{i\bullet}_{\bullet k}, \quad П^{ij}g_{ik}g_{jm} = П_{km}.$$

Индекстерді жоғары көтергенде, мысалы, мынадай арақатынасты аламыз $Д_{ij}g^{ik}g^{jm} = Д^{km}$.

е) Тензорларды ықшамдау.

Төртінші рангілі тензорды C_{kjke} қарастырайық. Мына түрдегі операция

$$C_{kjke} = C_{1j1e} + C_{2j2e} + C_{3j3e} = П_{je}$$

екінші рангілі тензорды береді. Бұл (j,e) екі индекстері бойынша төртінші рангілі тензорды ықшамдағанды білдіреді. (k,e) индекстері бойынша келесі ықшамдау операциясы скалярды береді, яғни

$$C_{keke} = C.$$

Скаляр – нольдік рангілі тензор, ол бір санмен сипатталады (3^0=1). Вектор – бірінші рангілі тензор, оның үш өлшемді кеңістікте үш компоненттері (3^1=3), ал екінші рангілі тензордың 9 компоненттері (3^2=9) және т.б. болады. p рангілі тензордың үш өлшемді кеңістікте 3^p компоненттері, ал r рангілі тензордың N өлшемді кеңістікте N^r компоненттері болады. Кейде симметриялық жағдайда тензордың тәуелсіз компоненттерінің саны азаюы мүмкін. Мысалы, екі валентті симметриялық тензор $(\Pi_{ij} = \Pi_{ji})$ алты тәуелсіз компоненттерге ие болады, ал антисимметриялық $(\Pi_{ij} = -\Pi_{ji})$ тензордың тек үш тәуелсіз компоненттері болады. Тензордың симметриялық ұғымы, кейбір топтардың түрлендірулеріне қатысты оның тензор компоненттерінің инварианттылығын білдіреді.

Жалпы жағдайда тензордың компоненттері координаталар жүйесін таңдап алуға байланысты болады. Бірақ таңдап алынған координаталар жүйесіне қатысты инвариантты болатын, тензор компоненттеріне тәуелді функцияларды табуға болады. Тензор компоненттерінің дәл осындай функциялары тензордың инварианттары делінеді.

Тензорлар мен векторлар компоненттерінің осындай функциялары басқа инвариантты объектілермен бірге физикалық заңдардың математикалық өрнегіне енеді, олар координаталар жүйесіне тәуелсіз болады.

Бірнеше тензордың компоненттерінің инвариантты функциялары скаляр болады.

Мысалы,

$$\vec{A} = A^i \vec{э}_i = A_j \vec{э}^j = A^i g_{ij} э^j$$

векторын алайық, оның скаляр көбейтіндісі

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^i A^j\ \vec{э}_i \vec{э}_j = A^i A^j g_{ij} = A^i A_i .$$

Алынған өрнек инвариант болып табылады ($\vec{A}$ векторының ұзындығының квадраты), себебі әр аттас вектордың компоненттерін түрлендіру өзара ауыспалы. Вектордың бір ғана тәуелсіз инварианты – оның ұзындығы, ал басқа инварианттар– ұзындықтың функциясы болып табылады.

Кез келген О нүктесін және оған жақын орналасқан М нүктесін алайық. О нүктесі арқылы координаталар сызықтарын ξ^1, ξ^2, ξ^3 жүргізейік

$$\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = d\xi^i\ \vec{э}_i$$

векторын және симметриялық тензорды

$$\Pi = \Pi^{ij}\ \vec{э}_i \vec{э}_j = \Pi_{ij}\ \vec{э}^i \vec{э}^j$$

қарастырайық. Шынында да $\Pi_{ij} d\xi^i d\xi^j$ инвариант болады және оның мәні

$$\Pi_{ij} d\xi^i d\xi^j = \Pi'_{ij}\ d\eta^i d\eta^j = C$$

мұндағы С – белгілі бір сан. О нүктесінің маңында С мен Π_{ij} мәндері белгілі, бұл теңдеу **тензорлық бет деп аталынатын екінші ретті бетті анықтайды.**

Өзімізге белгілі екінші ретті беттің бұл теңдеуін координаталарды түрлендіру арқылы негізгі түрге келтіруге болады, яғни О нүктесінде теңдеудің түрі төмендегідей болатын x^1, x^2, x^3 координаталар жүйесін таңдап алуға болады

$$\Pi_{11}\left(dx^1\right)^2 + \Pi_{22}\left(dx^2\right)^2 + \Pi_{33}\left(dx^3\right)^3 = C .$$

О нүктесіндегі x^1, x^2, x^3 координаталар жүйесі **ортогональді** болады. Сонда кеңістіктің әрбір нүктесінде екінші рангілі симметриялық тензордың тек үш компоненттері $\Pi_{11}, \Pi_{22}, \Pi_{33}$ ғана нольден өзгеше болатындай координаталар осін енгізуге болады. Мұндай осьтер **тензордың бас осьтері** делінеді, ал бас осьтер бойымен бағытталған тік бұрышты

декарт координаталар жүйесі **тензордың бас координаталар жүйесі** деп аталады. Сонда бас координаталар жүйесіндегі ковариантты және контравариантты компоненттердің айырмашылығы жойылады

$$\Pi^{ii} = \Pi_{ii} = \Pi_i^i = \Pi_i,$$

(i бойынша қосындысы жоқ). Бас жүйедегі нольден өзгеше үш және әртүрлі тензор компоненттері **бас компоненттер** деп аталады.

Берілген екі вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ арқылы мынадай матрицаны анықтауға болады

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = \left| a_s b_k \right|.$$

Бұдан $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларының диадалық көбейтіндісі (немесе диадасы) деп аталынатын $\vec{a}$, $\vec{b}$-мен белгіленетін екінші рангілі тензор шығады.

Симметриялық екінші рангілі тензорды девиаторлық және шарлық тензорларға ажыратуға болады.

Изотропты денелер үшін екінші рангілі П тензорын екі тензордың қосындысы түрінде келтіруге болады

$$\begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Pi_{11} - \Pi_0 & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} - \Pi_0 & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} - \Pi_0 \end{vmatrix},$$

яғни тензор = шарлық тензор + девиатор

мұндағы $\Pi_0 = \frac{1}{3}\left(\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33}\right) = \frac{1}{3} J_1(\Pi)$,

П тензорының бірінші бас инварианты – $J_1(\Pi)$. Изотропты тензор $\frac{1}{3} J_1(\Pi)\, g_{ij}$ (мұндағы g_{ij} - бірлік метрикалық тензор) П тензорының **шарлық бөлігі** деп аталынады. П тензорынан шарлық бөлігін шығарып алғаннан кейін, П тензорының девиаторы деп аталынатын тензор қалады, оны Dev П –мен белгілейміз

$$\Pi = \frac{1}{3} J_1(\Pi)\, g_{ij} + \mathrm{Dev}\,\Pi,$$

$$\mathrm{Dev}\,\Pi = \Pi - \frac{1}{3} J_1(\Pi)\, g_{ij}.$$

1.3.2. Тензорларды дифференциалдау

ξ^1, ξ^2, ξ^3 айнымалыларының функциясы $\vec{a}$ векторы берілсін дейік. $\vec{э}_m$ базисіндегі немесе оған түйіндес $\vec{э}^e$ базисіндегі $\vec{a}$ векторының жіктелуін қарастырайық

$$\vec{a} = a^m\, \vec{э}_m = a_e\, \vec{э}^e.$$

$\vec{a}$ векторының ξ^k айнымалысы бойынша туындысы

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial a^m}{\partial \xi^k}\, \vec{э}_m + a^m \frac{\partial\, \vec{э}_m}{\partial \xi^k},$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial a_e}{\partial \xi^k}\, \vec{э}^e + a_e \frac{\partial\, \vec{э}^e}{\partial \xi^k}. \qquad (1.7)$$

$\vec{э}_j$ базисінде $\partial\,\vec{э}_m\,/\,\partial\xi^k$ туындысын жіктейік

$$\frac{\partial\,\vec{э}_m}{\partial\xi^k}=\Gamma^j_{mk}\,\vec{э}_j \qquad \text{немесе} \qquad \Gamma^j_{mk}=\frac{\partial\,\vec{э}_m}{\partial\xi^k}\cdot\vec{э}^{\,j}\,.$$

Осы жіктеу коэффициенттері Γ^j_{mk} **2-ші ретті Кристоффель символы** деп аталады. (1.7) пайдаланып сол туынды үшін төмендегідей өрнекті аламыз:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\xi^k}=\left(\frac{\partial a^i}{\partial\xi^k}+a^m\Gamma^i_{mk}\right)\vec{э}_i=\nabla_k a^i\,\vec{э}_i=\nabla_k\vec{a}\,, \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\xi^k}=\left(\frac{\partial a_i}{\partial\xi^k}+a_e\Gamma^e_{ik}\right)\vec{э}^{\,i}=\nabla_k a_i\,\vec{э}^{\,i}=\nabla_k\vec{a}\,. \qquad (1.9)$$

Бұл жағдайларда декарт координаталар жүйесінде мына теңдік пайдаланылады

$$\nabla\vec{a}=\frac{\partial a^i}{\partial x^i}\,.$$

1.3.3. Тензорлармен жасалынатын негізгі дифференциалдық операциялар

Гамильтонның ∇ **(набла)** символы – векторлық оператор көмегімен **тензор градиентінің** ұғымын енгізейік

$$\nabla=\vec{э}^{\,k}\,\frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi^k}=\mathrm{grad}(\cdot).$$

Мысалы, нольдік рангілі тензордың (температураның) градиенті

$$\text{grad } T = \nabla T = \vec{э}^{\,k} \frac{\partial T}{\partial \xi^k}.$$

Тензордың градиенті – алдыңғы тензордың валенттілігін бір бірлікке арттырады.

Векторлық ∇ символының тензорға скаляр көбейтіндісі **тензордың дивергенциясы** деп аталады. Мысалы, $\vec{a}$ векторының дивергенциясы скаляр болып табылады

$$\nabla \cdot \vec{a} = \vec{э}^{\,k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \cdot a^j \vec{э}_j = \frac{\partial a^j}{\partial \xi^j} + a^i \Gamma^i_{ij}.$$

Декарт координаталар жүйесі жағдайында

$$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_3}{\partial x^3}.$$

Векторлық ∇ символының тензорға векторлық көбейтіндісі **тензордың роторы (құйыны)** деп аталады. Мысалы, декарт координаталар жүйесінде $\vec{a}$ векторының роторы псевдовектор болып табылады

$$\vec{c} = \nabla \times \vec{a} = \vec{э}^{\,k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right).$$

Лаплас операторы (лапласиан) дегеніміз, $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ дифференциалдық оператор. Мысалы, температураның T операторы (нольдік рангілі тензор) дегеніміз, төмендегідей түрдегі лапласиан

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}.$$

Ескерте кететін жәйт градиент, дивергенция, ротор, лапласианды анықтағанда оларды интегралдық формулалар түрінде жазуға болады

$$\nabla T = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_\sigma \vec{n} T d\sigma,$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_\sigma \vec{n} \cdot \vec{a} d\sigma,$$

$$\nabla \times \vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_\sigma \vec{n} \times \vec{a} d\sigma,$$

$$\nabla^2 T = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_\sigma \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma,$$

мұндағы $V-$үш өлшемді кеңістік, $\sigma-$теңдеудің сол жағында тұрған функцияларды есептеу барысында сол кеңістікке кіретін нүктелерді қамтитын бет, ал σ- бетке тұрғызылған сыртқы нормальдың векторы - $\vec{n}$.

1.3.4. Кристоффель символдарының қасиеттері

Метрикалық евклид кеңістігіндегі Кристоффель символдарын есептеу туралы сұраққа тоқталып оның қасиеттерін анықтайық. Айта кететін нәрсе, евклид немесе риман кеңістігінен де күрделірек кеңістіктер бар.

Кристоффель символдары тензордың компоненттері емес. Мысалы, сол бір кеңістіктің ішіндегі **декарт координаталар жүйесінде Кристоффель символдары нольге тең,** ал қисық сызықты координаталар жүйесінде нольден өзгеше. Тензордың компоненттері мұндай қасиеттерге ие емес.

Евклид кеңістігінде Кристоффель символдары төменгі индекстері бойынша симметриялы. Шын мәнінде евклид кеңістігінде әрқашанда радиус-вектор $\vec{r}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ болады, сонда:

$$\vec{э}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}, \quad \text{ал} \quad \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \xi^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^k \partial \xi^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} = \frac{\partial \vec{э}_k}{\partial \xi^i},$$

жоғарыда келтірілгендей

$$\left(\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial \xi^k} = \Gamma^i_{jk}\ \vec{э}_i\right), \quad \left(\frac{\partial \vec{э}_k}{\partial \xi^j} = \Gamma^i_{kj}\ \vec{э}_i\right)$$

бұдан симметрия қасиеті шығады

$$\Gamma^i_{jk}\ \vec{э}_i = \Gamma^i_{kj}\ \vec{э}_i \quad . \qquad (1.10)$$

Метрикалық тензор компоненттері $g = g_{is}\ \vec{э}_i \vec{э}_s$ арқылы Кристоффель символын есептейтін формуланы анықтайық.
Мына арақатынастан

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \xi^k}\ \vec{э}_s + \frac{\partial \vec{э}_s}{\partial \xi^k}\ \vec{э}_i$$

төмендегіні аламыз

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial \vec{э}_s}{\partial \xi^k}\ \vec{э}_i = \Gamma^j_{ik}\ \vec{э}_j \vec{э}_s = \Gamma^j_{ik} g_{js}$$

және сол сияқты

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{э}_s}{\partial \xi^i}\ \vec{э}_k = \Gamma^j_{ki}\ \vec{э}_j \vec{э}_s = \Gamma^j_{ik} g_{js}\,.$$

Соңғы екі теңдікті қосып, Кристоффель символдарының төменгі индекстерінің симметриялық қасиеттерін пайдаланып және мына теңдікті

$$\frac{\partial \vec{э}_k}{\partial \xi^s}\ \vec{э}_i + \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial \xi^s}\ \vec{э}_k = \frac{\partial g_{ki}}{\partial \xi^s},$$

ескеріп, төмендегіге келеміз

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial \xi^s} = 2\Gamma^j_{ki} g_{js}.$$

Осы арақатынасты $\frac{1}{2} g^{js}$ көбейтіп, соңында мынаны табамыз

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{js} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial \xi^s} \right). \qquad (1.11)$$

Есептер мен жаттығулар

1. Метрикалық тензоры g_{ij} кеңістік берілген. Кеңістіктің А және В екі нүктелерінің ара қашықтығын, сонымен қатар осы нүктелерден өтетін $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табыңыз.
2. Варианттылықтары (ковариант немесе контравариант) бірдей $\vec{a}$ және $\vec{b}$ екі вектордың қосындысын (айырымын) табыңыз.
3. Екінші рангілі екі тензордың қосындысын (айырымын) табыңыз. Екінші рангілі тензор симметриялық және антисимметриялық тензорлардың қосындысы екендігін көрсетіңіз.
4. $\vec{a} = a_i \, \vec{э}_j$ векторын дифференциалдаңыз.
5. Екінші рангілі тензорды $\Pi = \Pi^{ij} \, \vec{э}_i \vec{э}_j$ дифференциалдаңыз.